ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН - НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

-предавања-

До сада смо разматрали проблем диференцирања - била је задата функција f и требало је наћи њен извод f'.

$$\underbrace{x^2}_{\text{функција}} \xrightarrow{\text{диференцирање}} \underbrace{2x}_{\text{извод}(?)}$$

$$(x^2)' = 2x$$

Сада ћемо посматрати обрнути проблем - познат нам је извод функције, али саму функцију не знамо. Задатак је да пронађемо ту функцију. Поступак налажења те функције назива се **ИНТЕГРАЦИЈА.**

$$\underbrace{\boxed{?}}_{\text{функција}} \xleftarrow{\text{ИНТЕГРАЦИЈА}} \underbrace{x^2}_{\text{извод}}$$

$$\boxed{?}' = x^2$$

Није тешко видети да је $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$. Заиста, $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2$. Такође, $\left(\frac{1}{3}x^3+100\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \underbrace{100'}_{0} = x^2$. Видимо да постоји више функција чији је извод једнак x^2. Свака функција облика $\frac{1}{3}x^3 + C$, где је C било који број (кажемо да је C произвољна константа), има извод једнак x^2.

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + \underbrace{C'}_{0} = x^2.$$

Ако у изразу $\frac{1}{3}x^3 + C$ ставимо да је C неки конкретан број, онда ћемо добити конкретну функцију. Горе смо имали случај $C = 100$. Функције облика $\frac{1}{3}x^3 + C$ су **ПРИМИТИВНЕ ФУНКЦИЈЕ** функције x^2.

Претходно речено се помоћу математичких симбола може записати на следећи начин:

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Леву страну горње једнакости овако читамо: интеграл икс на квадрат де икс. Знак $\int$ је ознака за интеграл.

- Функција F је примитивна функција функције f на интервалу I ако је $F'(x) = f(x)$ за све тачке x из интервала I.

- Скуп свих примитивних функција функције f на интервалу I зове се НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ функције f на интервалу I, и обележава са

$$\int f(x)dx.$$

$f(x)$ се назива подинтегрална функција.

Ако је F једна примитивна функција функције f на интервалу I, онда је:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in R.$$

Пример: (а) $\int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C$, $C \in R$, за $x \in (-\infty, +\infty)$

У овом примеру је $f(x) = 2x+3$ и $F(x) = x^2 + 3x$. $F(x) = x^2 + 3x$ је једна примитивна функција функције $f(x) = 2x+3$. Са $x^2 + 3x + C$, где је C било која константа, је задат скуп свих примитивних функција функције $f(x) = 2x+3$.

Провера: $(x^2 + 3x + C)' = (x^2)' + (3x)' + C' = 2x + 3x' = 2x + 3 \cdot 1 = 2x + 3.$

(б) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$. $\int \frac{dx}{x^2}$ је уствари $\int \frac{1}{x^2} \cdot dx$, тако да се ради о неодређеном интегралу функције $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Провера: $\left(-\frac{1}{x} + C\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)' + C' = \left(-\frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$

*Таблица интеграла

До таблице интеграла долазимо помоћу таблице извода. Рецимо, ако искористимо резултат да је $(x^6)' = 6x^5$, онда ће бити

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C. \quad \text{Заиста, } \left(\frac{x^6}{6} + C\right)' = \left(\frac{1}{6}x^6\right)' + C' = \frac{1}{6}(x^6)' = \frac{1}{6}\cdot 6x^5 = x^5.$$

Такође, $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, јер је $(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$.

Нађимо сада $\int \frac{dx}{x^3}$. Једна примитивна функција функције $\frac{1}{x^3}$ је функција $-\frac{1}{2x^2}$:

$$\left(-\frac{1}{2x^2}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1'\cdot x^2 - 1\cdot(x^2)'}{x^4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{x^4} = \frac{1}{x^3}.$$

Добили смо $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$. Ову формулу можемо записати и овако:

$$\int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C,$$ док $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$ има облик

$$\int x^{5} dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C.$$

1° $\int dx = \int 1\cdot dx = x + C$, $[(x+C)' = x' + C' = 1]$;

2° $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$;

3° $\int e^x dx = e^x + C$;

4° $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $[(-\cos x + C)' = (-\cos x)' = -(\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x]$;

5° $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

6° $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C;$	7° $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$
8° $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C;$	9° $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

* Основна својства неодређеног интеграла

1° $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; (АДИТИВНОСТ)

2° $\int \lambda f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx.$

Пример: $\int (\underbrace{5x^3}_{f} \underbrace{- 4\sin x}_{g})dx = \int (\underbrace{5x^3}_{f} + \underbrace{(-4\sin x)}_{g})dx \overset{1^\circ}{=}$

$= \int 5x^3 dx + \int (-4\sin x)dx = \int 5x^3 dx + \int (-4)\sin x dx \overset{2^\circ}{=} 5\int x^3 dx + (-4)\int \sin x dx =$

$= 5 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot (-\cos x) + C = \frac{5}{4}x^4 + 4\cos x + C;$

3° $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

Сада ћемо посебно размотрити $\int \frac{dx}{x}$. Област дефинисаности подинтегралне функције $f(x) = \frac{1}{x}$ је $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

1° $(0,+\infty)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, па је зато $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1,\ x \in (0,+\infty)$

2° $(-\infty,0)$

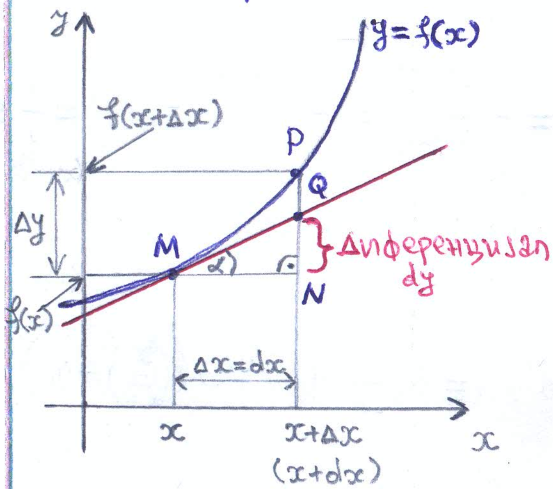
$(\ln(-x)+C_2)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C_2,\ x \in (-\infty,0).$$

Обично пишемо: $\boxed{\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.}$ ⟵ Таблични интеграл

Методе интеграције

* Смена променљиве



Δx – прираштај независне променљиве x

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ — прираштај функције

Диференцијал функције: $\boxed{dy = f'(x)dx}$

ΔMNQ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{QN}{MN}$, $f'(x) = \frac{QN}{dx}$,

$QN = f'(x)dx$, $dy = QN$.

$\Delta y = PN = PQ + QN$, $\Delta y = PQ + dy$. Уколико је тачка $x+\Delta x\,(x+dx)$ веома близу тачке x, онда дуж PQ има занемарљиву дужину, и можемо писати $\Delta y \approx dy$.

1° $\int e^{2x+3}dx$. Увешћемо смену $t = 2x+3$. Тада члан e^{2x+3} постаје e^t, тако да добијамо једноставнији израз. Из $t = 2x+3$, добијамо $2x = t-3$, односно $x = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$. Дакле, x зависи од t, тј. x је функција од t. Члан dx из интеграла $\int e^{2x+3}dx$ третирамо као диференцијал функције $x = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$, тако да важи $dx = x'(t)dt = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right)'dt = \left(\frac{1}{2}t\right)'dt = \frac{1}{2}dt$. Значи, $dx = \frac{1}{2}dt$. Сада имамо:

$$\int e^{2x+3}dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x+3} + C.$$

2° $\int (3x-7)^5 dx$. $\quad t = 3x-7$, $3x = t+7$, $x = \frac{1}{3}t + \frac{7}{3}$, $x'(t) = \frac{1}{3}$

$dx = x'(t)dt$, $dx = \frac{1}{3}dt$

$$\int (3x-7)^5 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^5 dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-7)^6}{6} + C.$$

3° $\int x^2 \cos x^3 dx$, $\quad t = x^3$, $dt = (x^3)'dx$, $dt = 3x^2dx$, $x^2dx = \frac{1}{3}dt$

$$\int x^2\cos x^3 dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin x^3 + C.$$

4° $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$, Смена: $t=\cos x$, $dt=(\cos x)'dx$, $dt=-\sin x dx$, $\sin x dx=-dt$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{-dt}{t^2}=-\int \frac{dt}{t^2}=-\int t^{-2}dt=-\frac{t^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{t^{-1}}{-1}=t^{-1}=\frac{1}{t}=$$

$$=\frac{1}{\cos x}+C$$

5° $\int \frac{dx}{x^2+3}$. Користимо трансформацију $x^2+3=3\left(\frac{x^2}{3}+1\right)=3\left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$

$$\int \frac{dx}{x^2+3}=\int \frac{dx}{3\left(\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$ Сада уводимо смену

$\frac{x}{\sqrt{3}}=t$, $x=\sqrt{3}\cdot t$, $dx=(\sqrt{3}t)'dt$, $dx=\sqrt{3}\,dt$. Добијамо:

$$\int \frac{dx}{x^2+3}=\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{3}\cdot dt}{t^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

6° $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$. Смена: $t=\ln x$, $dt=(\ln x)'dx$, $dt=\frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx=\int \ln^3 x\cdot\frac{1}{x}dx=\int t^3 dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}\ln^4 x+C.$$

* Парцијална интеграција

Приметимо да је $\int f'(x)dx=f(x)+C$. Рецимо, $\int 2x dx=2\int x^1 dx=$

$=2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}=2\cdot\frac{x^2}{2}=x^2$. Дакле,

$$\int \underbrace{2x\,dx}_{f'(x)}=\underbrace{x^2}_{f(x)}+C$$

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ функције које имају извод у свим тачкама неког интервала.

$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, $u(x)v'(x)=(u(x)v(x))'-u'(x)v(x)$

$$\int u(x)v'(x)dx=\int\left[(u(x)v(x))'-u'(x)v(x)\right]dx,$$

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \int (\underbrace{u(x)v(x)})'\,dx - \int u'(x)v(x)\,dx,$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.\\ &\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du\end{aligned}}$$

Скраћено:

1° $\int \underbrace{x}_{u}\overbrace{\underbrace{e^x}_{v'}\,dx}^{dv}$ $\quad u = x,\quad dv = e^x dx,$

$du = dx,\quad v' = e^x,\quad v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

2° $\int \underbrace{x}_{u}\overbrace{\underbrace{\sin x}_{v'}\,dx}^{dv}$ $\quad u = x,\quad dv = \sin x\,dx,\quad v' = \sin x$

$du = dx,\quad v = -\cos x$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Провера: $(-x\cos x + \sin x + C)' = (-x\cos x)' + (\sin x)' = -(x\cos x)' + \cos x =$

$= -(x'\cos x + x(\cos x)') + \cos x = -(\cos x + x(-\sin x)) + \cos x =$

$= -(\cos x - x\sin x) + \cos x = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x$ ✓

3° $\int \ln x\,dx$ $\quad \int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\overbrace{\underbrace{1}_{v'}\,dx}^{dv}$ $\quad u = \ln x$, $du = (\ln x)'dx$, $du = \frac{1}{x}dx$ $\quad dv = dx$, $v' = 1$, $v = x$

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot\ln x - x + C.$$

Провера: $(x\ln x - x + C)' = (x\cdot\ln x)' - x' = x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)' - 1 =$

$= \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$

$$4^\circ \quad \int \underbrace{e^x}_{v'} \underbrace{\cos x}_{u}\, dx \qquad \begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= (\cos x)'\,dx \\ du &= -\sin x\,dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \\ v' &= e^x \\ v &= e^x \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{I} = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx = e^x\cos x + \underbrace{\int e^x \sin x\, dx}_{J}$$

Сада рачунамо интеграл $J = \int e^x \sin x\, dx$:

$$\int \underbrace{e^x}_{v'} \underbrace{\sin x}_{u}\, dx \qquad \begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= (\sin x)'\,dx \\ du &= \cos x\,dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \\ v' &= e^x \\ v &= e^x \end{aligned}$$

$$J = \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

Сада добијамо: $\int e^x \cos x\, dx = e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$,

$2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\sin x + \cos x)$. Коначно:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

$$5^\circ \quad \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'}\, dx \qquad \begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= (x^2)'\,dx \\ du &= 2x\,dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= \cos x\,dx \\ v' &= \cos x \\ v &= \sin x \end{aligned}$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2\cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x \cdot dx = x^2 \cdot \sin x - 2\overbrace{\int x \sin x\, dx}^{\text{Део } 2^\circ}$$

$$= x^2\cdot \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Рационална функција има облик $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми.
Означимо са $st(P)$ и $st(Q)$ степене полинома P и Q, редом.

1° $st(P)<st(Q)$

R je ПРАВА РАЦИОНАЛНА ФУНКЦИЈА.

2° $st(P)\geq st(Q)$

R je НЕПРАВА РАЦИОНАЛНА ФУНКЦИЈА. Свака неправа рационална функција се може приказати као збир једног полинома и једне праве рационалне функције.

Пример: (a) $R(x)=\frac{x+5}{x^2+x-2}$. Овде је: $P(x)=x+5$, $Q(x)=x^2+x-2$, $st(P)=1$ и $st(Q)=2$. Како је $st(P)<st(Q)$, онда је $R(x)=\frac{x+5}{x^2+x-2}$ права рационална функција.

(б) $R(x)=\frac{x^3+x}{x-1}$. Овде је: $P(x)=x^3+x$, $Q(x)=x-1$, $st(P)=3$ и $st(Q)=1$. Како је $st(P)>st(Q)$, онда је $R(x)=\frac{x^3+x}{x-1}$ неправа рационална функција.

$$x^3+\quad+x \;:\; (x-1)=\underbrace{x^2+x+2}_{\text{количник}}$$

$$\begin{array}{l}
x^3+\quad +x\\
-(x^3-x^2)\\
\hline
\quad x^2+x\\
\quad -(x^2-x)\\
\hline
\qquad 2x\\
\qquad -(2x-2)\\
\hline
\qquad\quad \boxed{2} - \text{остатак}
\end{array}$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{x^3+x}{x-1}}}_{\text{Неправа рационална функција}}=\underbrace{\boxed{x^2+x+2}}_{\text{Полином}}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{x-1}}}_{\text{Права рационална функција}}$$

Приликом интеграције рационалне функције, основна идеја је да ту рационалну функцију раставимо на збир једноставнијих функција. Као што смо видели, неправа рационална функција се може раставити на збир полинома и праве рационалне функције, тако да се у наставку бавимо растављањем правих рационалних функција.

Нека је $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ права рационална функција.

Случај 1: Именилац $Q(x)$ је производ различитих линеарних чланова

$$Q(x) = \underbrace{(a_1x+b_1)}\underbrace{(a_2x+b_2)}\cdots\underbrace{(a_kx+b_k)}$$

Линеарни чланови

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ су бројеви које треба одредити

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left[\frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx+b_k}\right]dx = \int\frac{A_1}{a_1x+b_1}dx + \int\frac{A_2}{a_2x+b_2}dx + \cdots + \int\frac{A_k}{a_kx+b_k}dx$$

Пример: (a) $\int \frac{dx}{x^2+5x}$

Овде се ради о интеграцији рационалне функције $R(x) = \frac{1}{x^2+5x}$;
$P(x) = 1$, $Q(x) = x^2+5x$, $st(P) = 0$, $st(Q) = 2$; $st(P) < st(Q) \to R$ је права рационална функција.

$Q(x) = x^2+5x = \underbrace{x}\cdot\underbrace{(x+5)}$; x и $x+5$ су линеарни чланови.

$$\frac{1}{x^2+5x} = \frac{1}{x(x+5)} = \frac{A^{\llcorner\cdot(x+5)}}{x} + \frac{B^{\llcorner x}}{x+5}; \quad \boxed{\frac{1}{x^2+5x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}}$$

$$\frac{1}{x(x+5)} = \frac{A(x+5)}{x(x+5)} + \frac{Bx}{x(x+5)} = \frac{A(x+5)+Bx}{x(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx}{x(x+5)},$$

$$\frac{1}{x(x+5)} = \frac{(A+B)x+5A}{x(x+5)}, \quad \left.\begin{array}{l}A+B=0\\5A=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}A+B=0\\A=\frac{1}{5}\end{array}\right\} \quad A=\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{x^2+5x} = \frac{\frac{1}{5}}{x} + \frac{-\frac{1}{5}}{x+5} = \boxed{\frac{\frac{1}{5}}{x} - \frac{\frac{1}{5}}{x+5}} \leftarrow \frac{1}{x^2+5x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+5x} = \int \frac{1}{x^2+5x}\,dx = \int \left[\frac{\frac{1}{5}}{x} - \frac{\frac{1}{5}}{x+5} \right] dx = \int \frac{\frac{1}{5}}{x}\,dx - \int \frac{\frac{1}{5}}{x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5} \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{\text{таблични интеграл}} - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+5}\,dx = \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x+5| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln|x| - \ln|x+5|\right) + C = \frac{1}{5}\ln\frac{|x|}{|x+5|} + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right| + C \;\blacksquare$$

$$\int \frac{1}{x+5}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| = \ln|x+5|$$

$t = x+5$

$dt = (x+5)'\,dx$

$dt = dx$

Дакле:

$$\int \frac{dx}{x^2+5x} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x}{x+5}\right| + C$$

Напомена: Често ће нам се јављати интеграл облика $\int \frac{1}{x-a}\,dx$. Рецимо, интеграл $\int \frac{1}{x+5}\,dx$ се може записати као

$\int \frac{1}{x+5}\,dx = \int \frac{1}{x - \underbrace{(-5)}_{a}}\,dx$, тј. $a = -5$. Интеграл $\int \frac{1}{x-a}\,dx$ решавамо

сменом $t = x-a$, $dt = (x-a)'\,dx$, $dt = dx$. Имамо:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|x-a| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + C} \quad \ldots (*)$$

a може бити како позитиван, тако и негативан број

(б) $\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}\,dx$

$R(x) = \frac{x^2}{x^2-3x+2}$, $P(x) = x^2$, $Q(x) = x^2-3x+2$, $st(P) = st(Q) = 2$;

Функција $\frac{x^2}{x^2-3x+2}$ је неправа рационална функција.

$$x^2 : (x^2-3x+2) = \boxed{1}$$
$$\frac{-(x^2-3x+2)}{\boxed{3x-2}}$$

полином; права рационална функција

$$\frac{x^2}{x^2-3x+2} = \boxed{1} + \boxed{\frac{3x-2}{x^2-3x+2}}$$

Сада је потребно раставити праву рационалну функцију $\frac{3x-2}{x^2-3x+2}$.
Прво ћемо квадратни трином x^2-3x+2 раставити на чиниоце.

$x^2-3x+2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 2}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$a = 1$

$b = -3$

$c = 2$

$x^2-3x+2 = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2}=\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}\bigg|\cdot(x-2)+\frac{B}{x-2}\bigg|\cdot(x-1),\quad \boxed{\frac{3x-2}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}}$$

$$\boxed{\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)}}=\frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}=\boxed{\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\2A+B=2\end{array}\right\}\quad 2A+B=A+\underbrace{A+B}_{3}=2,\quad B=3-A$$

$$A+3=2,\ \boxed{A=-1}\qquad B=3-(-1),\ \boxed{B=4}$$

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-1};$$

$$\frac{x^2}{x^2-3x+2}=1+\underbrace{\frac{3x-2}{x^2-3x+2}}=1+\underbrace{\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-1}};$$

$$\int\frac{x^2}{x^2-3x+2}dx=\int\left[1+\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right]dx=\int 1dx+\int\frac{4}{x-2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$$

$$=x+4\int\frac{1}{x-2}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=x+4\ln|x-2|-\ln|x-1|+C=$$

$$=x+\ln|x-2|^4-\ln|x-1|+C=x+\ln\frac{|x-2|^4}{|x-1|}+C.$$

(b) $\int\frac{x^6}{x^2-1}dx$

$R(x)=\frac{x^6}{x^2-1}$, $P(x)=x^6$, $Q(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$, $st(P)=6$, $st(Q)=2$,

$st(P)>st(Q)$; $\frac{x^6}{x^2-1}$ је неправа рационална функција.

$$\begin{array}{l}x^6:(x^2-1)=\boxed{x^4+x^2+1}\\-(x^6-x^4)\\\hline \quad x^4\\\quad -(x^4-x^2)\\\hline\qquad x^2\\\qquad -(x^2-1)\\\hline\qquad\quad \boxed{1}\end{array}$$

$$\frac{x^6}{x^2-1}=\underbrace{x^4+x^2+1}_{\text{полином}}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2-1}}}_{\text{права рац. функција}}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}\bigg|\cdot(x+1)+\frac{B}{x+1}\bigg|\cdot(x-1)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)};$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)};$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\A-B=1\end{array}\right\}\oplus\quad 2A=1,\ A=\frac{1}{2};\quad B=-A,\ B=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$\frac{x^6}{x^2-1}=x^4+x^2+1+\frac{1}{x^2-1}=x^4+x^2+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$\int\frac{x^6}{x^2-1}dx=\int\left[x^4+x^2+1+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right]dx=$$

$$=\int x^4dx+\int x^2dx+\int 1\cdot dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C \blacksquare$$

Случај 2: Именилац $Q(x)$ је производ линеарних чланова, али неки линеарни чланови се понављају

Размотрићемо неколико посебних подслучајева.

I $Q(x)=(ax+b)^2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax+b)^2}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$$; A и B су бројеви које треба одредити.

II $Q(x)=(ax+b)^3$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax+b)^3}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$$; A, B и C су бројеви које треба одредити.

III $Q(x)=(ax+b)(cx+d)^2$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(ax+b)(cx+d)^2}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{(cx+d)^2}$$; A, B и C су бројеви које треба одредити.

Пример: (а) $\int \frac{2x-3}{(x-2)^2}dx$

Треба наћи интеграл рационалне функције $\frac{2x-3}{(x-2)^2}$. Овде је $P(x)=2x-3$ и $Q(x)=(x-2)^2$. Како је $st(P)=1$ и $st(Q)=2$, функција $\frac{2x-3}{(x-2)^2}$ је права рационална функција.

$$Q(x)=(x-2)^2=(\underbrace{1}_{a}\cdot x+\underbrace{(-2)}_{b})^2 \longrightarrow$$ Наша рационална функција задовољава подслучај I

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{A^{\llcorner(x-2)}}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2};\quad \frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2};$$

$$\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{Ax-2A+B}{(x-2)^2},\quad \frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{Ax-(2A-B)}{(x-2)^2};\quad \left.\begin{array}{l}\boxed{A=2}\\ 2A-B=3\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}2\cdot2-B=3\\ \boxed{B=1}\end{array}$$

$$\boxed{\frac{2x-3}{(x-2)^2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$\int\frac{2x-3}{(x-2)^2}dx=\int\left[\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right]dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=$$

$$=2\cdot\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=2\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C.$$

$$\int\frac{2x-3}{(x-2)^2}dx=2\ln|x-2|-\frac{1}{x-2}+C$$

$$\int\frac{1}{(x-2)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}=\frac{t^{-1}}{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{x-2}$$

$t=x-2$
$dt=dx$

Напомена. $\int\frac{1}{(x-a)^k}dx$, $k\in\mathbb{N}$, $k>1$; уводимо смену $t=x-a$, $dt=dx$.

$$\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=\int\frac{1}{t^k}dt=\int t^{-k}dt=\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{t^{-(k-1)}}{-(k-1)}=-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{t^{k-1}}+C,$$

$$\boxed{\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\quad a\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N},\ k>1}\quad\ldots(**)$$

(б) $\int \frac{2+3x}{(3-x)^3}\,dx$ $\qquad P(x)=2+3x,\ Q(x)=(3-x)^3$

$st(P)=1,\quad st(Q)=3,\quad st(P)<st(Q)$

$\frac{2+3x}{(3-x)^3}$ је права рационална функција.

$$\frac{2+3x}{(3-x)^3}=\frac{A^{\llcorner\cdot(3-x)^2}}{3-x}+\frac{B^{\llcorner\cdot(3-x)}}{(3-x)^2}+\frac{C}{(3-x)^3}$$

$$\boxed{\frac{2+3x}{(3-x)^3}}=\frac{A(3-x)^2+B(3-x)+C}{(3-x)^3}=\frac{A(9-6x+x^2)+3B-Bx+C}{(3-x)^3}=$$

$$=\frac{9A-6Ax+Ax^2+3B-Bx+C}{(3-x)^3}=\boxed{\frac{Ax^2-(6A+B)x+(9A+3B+C)}{(3-x)^3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A=0}\\ -(6A+B)=3\\ 9A+3B+C=2\end{array}\right\}\qquad \begin{array}{l}-(6\cdot 0+B)=3\\ -B=3\\ \boxed{B=-3}\end{array}\qquad \begin{array}{l}9\cdot 0+3\cdot(-3)+C=2\\ -9+C=2\\ \boxed{C=11}\end{array}$$

$$\frac{2+3x}{(3-x)^3}=\frac{-3}{(3-x)^2}+\frac{11}{(3-x)^3}=\frac{11}{(3-x)^3}-\frac{3}{(3-x)^2};$$

$$(3-x)^2=(-(x-3))^2=(x-3)^2;\ (3-x)^3=(-(x-3))^3=-(x-3)^3$$

$$\frac{2+3x}{(3-x)^3}=\frac{11}{-(x-3)^3}-\frac{3}{(x-3)^2}=-\frac{11}{(x-3)^3}-\frac{3}{(x-3)^2}$$

$$\int\frac{2+3x}{(3-x)^3}\,dx=\int\left[-\frac{11}{(x-3)^3}-\frac{3}{(x-3)^2}\right]dx=-11\overbrace{\int\frac{1}{(x-3)^3}dx}^{(**)}-3\overbrace{\int\frac{1}{(x-3)^2}dx}^{(**)}$$

$$=-11\cdot\left(-\frac{1}{3-1}\cdot\frac{1}{(x-3)^{3-1}}\right)-3\cdot\left(-\frac{1}{2-1}\cdot\frac{1}{(x-3)^{2-1}}\right)=$$

$$=-11\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\right)-3\cdot\left(-\frac{1}{(x-3)}\right)=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}+3\cdot\frac{1}{x-3};$$

$$\int\frac{2+3x}{(3-x)^3}\,dx=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{(3-x)^2}-3\cdot\frac{1}{3-x}+C,$$

$$\int\frac{2+3x}{(3-x)^3}\,dx=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}+3\cdot\frac{1}{x-3}+C.$$

(6) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$ $R(x)=\frac{1}{x(x+1)^2}$, $P(x)=1$, $Q(x)=x(x+1)^2$

$st(P)=0$, $st(Q)=3$, $st(P)<st(Q)$

Функција $\frac{1}{x(x+1)^2}$ је права рационална функција.

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)^2}}=\frac{A^{\llcorner\cdot(x+1)^2}}{x}+\frac{B^{\llcorner\cdot x(x+1)}}{x+1}+\frac{C^{\llcorner\cdot x}}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx}{x(x+1)^2}=$$

$$=\boxed{\frac{(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A}{x(x+1)^2}}, \quad \left.\begin{array}{c} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ \boxed{A=1} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 1+B=0,\ \boxed{B=-1} \\ 2\cdot1-1+C=0,\ 1+C=0 \\ \boxed{C=-1} \end{array}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2};$$

$$\int\frac{dx}{x(x+1)^2}=\int\underbrace{\frac{1}{x(x+1)^2}}\,dx=\int\underbrace{\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right]}dx=$$

$$=\int\frac{1}{x}dx-\overbrace{\int\frac{1}{x+1}dx}^{(*)}-\overbrace{\int\frac{1}{(x+1)^2}dx}^{(**)}=\ln|x|-\ln|x+1|-\left(-\frac{1}{2-1}\cdot\frac{1}{(x+1)^{2-1}}\right)$$

$$=\ln\frac{|x|}{|x+1|}+\frac{1}{x+1}+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+C.$$

Случај 3: Именилац $Q(x)$ садржи квадратни члан ax^2+bx+c који се не може даље раставити

Споменућемо неке типичне ситуације.

I $Q(x)=(\alpha x+\beta)(ax^2+bx+c)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(\alpha x+\beta)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{\alpha x+\beta}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c};$$

A, M и N су бројеви које треба одредити

II $Q(x)=(\alpha_1 x+\beta_1)(\alpha_2 x+\beta_2)(ax^2+bx+c)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(\alpha_1 x+\beta_1)(\alpha_2 x+\beta_2)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{\alpha_1 x+\beta_1}+\frac{B}{\alpha_2 x+\beta_2}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

III $Q(x)=(\alpha x+\beta)^2(ax^2+bx+c)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(\alpha x+\beta)^2(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{\alpha x+\beta}+\frac{B}{(\alpha x+\beta)^2}+\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ се такође јавља често. Решавамо га сменом $x=at$,

$dx=(at)'dt$, $dx=a\,dt$.

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\,dt}{(at)^2+a^2}=\int\frac{a\,dt}{a^2t^2+a^2}=\int\frac{a\,dt}{a^2(t^2+1)}=\frac{a}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. Дакле:

$$\boxed{\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C}\quad \dots (***)$$

Пример: (a) $\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$ $\quad P(x)=2x^2-x+4$, $st(P)=2$

$Q(x)=x^3+4x$, $st(Q)=3$

$st(P)<st(Q)$; $\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}$ је права рационална функција.

$Q(x)=x^3+4x=x(x^2+4)\longleftarrow$ Подслучај I (стр. 8)

$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+4}$. Проширивањем

добијамо:

$$\boxed{\frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}}=\frac{A^{\llcorner (x^2+4)}}{x}+\frac{Mx+N^{\llcorner x}}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+(Mx+N)x}{x(x^2+4)}=$$

$$=\frac{Ax^2+4A+Mx^2+Nx}{x(x^2+4)}=\boxed{\frac{(A+M)x^2+Nx+4A}{x(x^2+4)}};\quad \left.\begin{aligned}A+M&=2\\ N&=-1\\ 4A&=4\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\begin{aligned}A&=1\\ M&=1\\ N&=-1\end{aligned}}$$

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}$$

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \int\left[\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right]dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx =$$

$$= \ln|x| + \int \frac{x-1}{x^2+4}dx; \quad \boxed{\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \ln|x| + \int\frac{x-1}{x^2+4}dx}$$

(1)

Сада треба решити интеграл $\int \frac{x-1}{x^2+4}dx$.

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}dx = \underbrace{\int \frac{x}{x^2+4}dx}_{I_1} - \underbrace{\int\frac{1}{x^2+4}dx}_{I_2}$$

I_1: смена $t = x^2+4$, $dt = (x^2+4)'dx$, $dt = 2x\,dx$, $\frac{1}{2}dt = x\,dx$

$$I_1 = \int \frac{x}{x^2+4}dx = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(x^2+4);$$

I_2: Применићемо формулу (***) за $a = 2$.

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2+4}dx = \int\frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$$

Сада је $\boxed{\int\frac{x-1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$ .....(2)

Коначно, формуле (1) и (2) дају:

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

(б) $\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx$, $P(x) = x^3+1$, $st(P) = 3$, $Q(x) = x(x^3-8)$, $st(Q) = 4$, $\underbrace{st(P) < st(Q)}$ $\Downarrow$ $\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}$ је права рац. функција

$x^3-8 = x^3-2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$Q(x) = x(x^3-8) = x(x-2)(x^2+2x+4)$ ⟵ Подслучај II, стр. 9

$$\boxed{\frac{x^3+1}{x(x^3-8)} = \frac{x^3+1}{x(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+4}} \quad ...(3)$$

x^2+2x+4 се не може даље растављати! $x^2+2x+4 = (x-x_1)(x-x_2)$

$x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot4}}{2}$ ⟵ Број под кореном је негативан, x_1 и x_2 нису реални бројеви.

Помножимо леву и десну страну формуле (3) са $x(x-2)(x^2+2x+4)$:

$$x^3+1=A(x-2)(x^2+2x+4)+Bx(x^2+2x+4)+(Mx+N)x(x-2)$$

$$x^3+1=(Ax-2A)(x^2+2x+4)+Bx^3+2Bx^2+4Bx+(Mx+N)(x^2-2x)$$

$$x^3+1=Ax^3+2Ax^2+4Ax-2Ax^2-4Ax-8A+Bx^3+2Bx^2+4Bx+Mx^3-2Mx^2+Nx^2-2Nx$$

$$x^3+1=(A+B+M)x^3+(2B-2M+N)x^2+(4B-2N)x-8A$$

$$\left.\begin{aligned} A+B+M&=1\\ 2B-2M+N&=0\\ 4B-2N&=0\\ -8A&=1 \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned} &A=-\frac{1}{8}\\ &B+M=1-A=1-\left(-\frac{1}{8}\right)=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\\ &B+M=\frac{9}{8};\quad 4B=2N,\quad N=2B. \end{aligned}$$

Друга једначина постаје $2B-2M+2B=0$, $4B-2M=0$, $2B-M=0$

Имамо систем $\left.\begin{aligned} B+M&=\frac{9}{8}\\ 2B-M&=0 \end{aligned}\right\} \oplus \; 3B=\frac{9}{8}$, $B=\frac{3}{8}$, $N=2\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

$M=\frac{9}{8}-B=\frac{9}{8}-\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Дакле: $\boxed{A=-\frac{1}{8},\ B=\frac{3}{8},\ M=\frac{3}{4},\ N=\frac{3}{4}}$

Сада формула (3) постаје:

$$\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}=\frac{-\frac{1}{8}}{x}+\frac{\frac{3}{8}}{x-2}+\frac{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{x^2+2x+4}$$

$$\int\frac{x^3+1}{x(x^3-8)}\,dx=\int\left[\frac{-\frac{1}{8}}{x}+\frac{\frac{3}{8}}{x-2}+\frac{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{x^2+2x+4}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{3}{8}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\int\frac{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{x^2+2x+4}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|x-2|+\frac{3}{4}\underbrace{\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx}_{J} \quad \ldots\ldots(4)$$

J: $x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2+3$

$$J=\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx=\int\frac{x+1}{(x+1)^2+3}\,dx=\int\frac{t}{t^2+3}\,dt=\int\frac{\frac{1}{2}du}{u}=$$

$t=x+1$ $\quad$ $t^2+3=u$

$dt=dx$ $\quad$ $du=2t\,dt$, $\quad t\,dt=\frac{1}{2}du$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln(t^2+3)=\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+3)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4),\quad \boxed{J=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)}$$

Сада (4) постаје:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx = -\frac{1}{8}\ln|x| + \frac{3}{8}\ln|x-2| + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|x| + \frac{3}{8}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x^2+2x+4| + C =$$

$$= \frac{3}{8}\left[\ln|x-2| + \ln|x^2+2x+4|\right] - \frac{1}{8}\ln|x| + C =$$

$$= \frac{3}{8}\ln(|x-2||x^2+2x+4|) - \frac{1}{8}\ln|x| + C = \frac{3}{8}\ln|(x-2)(x^2+2x+4)| - \frac{1}{8}\ln|x|$$

$$+ C = \frac{3}{8}\ln|x^3-8| - \frac{1}{8}\ln|x| + C;$$

Коначно: $\int \frac{x^3+1}{x(x^3-8)}dx = \frac{3}{8}\ln|x^3-8| - \frac{1}{8}\ln|x| + C$ ■